

EXERCICES DE RÉVISIONS : ANALYSE COMPLEXE-CHAPITRE V

Série de Laurent

La série de Laurent en $z = z_0$ d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine D sauf au pôle $z = z_0$ est

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Les coefficients a_n de Laurent sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (C \text{ un contour fermé autour de } z_0.)$$

z_0 est appelé un pôle d'ordre k si $(z - z_0)^k f(z)$ est holomorphe et $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ est finie et $\neq 0$.

Une singularité en z_0 est dite enlevable si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ est finie ou bien $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

Une singularité en z_0 est dite essentielle si la série de Laurent contient une infinité de termes singuliers.

Pour développer rapidement une fonction en série de Laurent sans calculer les coefficients

a_n , il est utile de connaître quelques développements usuels de Taylor

$$\frac{1}{1+z} = \sum (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots \quad (\text{Valide pour } |z| < 1.)$$

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (\text{Valide pour tout } z.)$$

$$\sin z = \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad (\text{Valide pour tout } z.)$$

$$\cos z = \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad (\text{Valide pour tout } z.)$$

Rappel: Le développement de Taylor en $z = z_0$ est $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$

Calcul des Résidus

Le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent est appelé résidu de la fonction au pôle $z = z_0$. Il est donné par

$$a_{-1} \equiv \text{Rés.} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right]. \quad (\text{si } z_0 \text{ est un pôle d'ordre } k.)$$

Théorème des Résidus

Si la fonction possède plusieurs pôles à l'intérieur d'un contour C

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (\sum \text{Rés.}) \quad \text{Où } (\sum \text{Rés.}) \text{ est la somme des résidus aux pôles.}$$

Calculs d'Intégrales Réelles par les Complexes

Au lieu de calculer une intégrale réelle directement, on calcule plutôt l'intégrale complexe en choisissant un contour adéquat.


(Cette méthode est parfois dite Complexification comme on l'a appelée en Physique.3)

Les plus simples intégrales de contour sont

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \longrightarrow 1) \oint_C f(z) dz \text{ avec } C = \text{demi-cercle de rayon } R \text{ dans le demi-plan supérieur.}$$

2) Utiliser le théorème des résidus, puis prendre $R \rightarrow \infty$.

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \longrightarrow 1) \text{ Poser } z = e^{i\theta}. \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}. \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}. \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

2) Calculer $\oint_C f(z) dz$ avec le théorème des résidus où $C =$ 

$$\text{Rappel de la règle de L'Hôpital: } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}. \quad (g'(z) \neq 0)$$